OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1.

(2p) $S_n = 1 + (11+1) + (111+1) + ... + \left(\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ ori}} + 1\right)$

(1p) $S_n = \left(1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ ori}}\right) + n - 1$

(2p) $S_n = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(10^k - 1\right) + n - 1$

(2p) $S_n = \frac{1}{9}\left(10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} - n\right) + n - 1 = S_n = \frac{10^{n+1} + 72n - 91}{81}$

PROBLEMA 2.

(2p) a) Din inegalitatea mediilor, avem:$\sqrt{1 \cdot 2x} \leq \frac{1+2x}{2}$, $\sqrt{1 \cdot 3y} \leq \frac{1+3y}{2}$, $\sqrt{4z} \leq \frac{1+4z}{2}$

(1p) de unde, $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} + \sqrt{4z} \leq \frac{3 + (2x+3y+4z)}{2} = \frac{9}{2}$

(1p) Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ şi $z = \frac{1}{4}$, valori care nu verifică relaţia $2x + 3y + 4z = 6$.

b) Notăm $S = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z}$

(1p) $6S = (2x+3y+4z)\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z}\right) = 29 + 6\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 12\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + 8\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$

(1p) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, pentru $a, b \in (0, +\infty)$

(1p) Deci $6S \geq 81$, de unde $S \geq \frac{27}{2}$. Egalitatea are loc pentru $x = y = z = \frac{2}{3}$.

PROBLEMA 3.

(1p) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{4n+2} = \sqrt{2(2n+1)} \notin \mathbb{N}$

(4p) Are loc: $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$

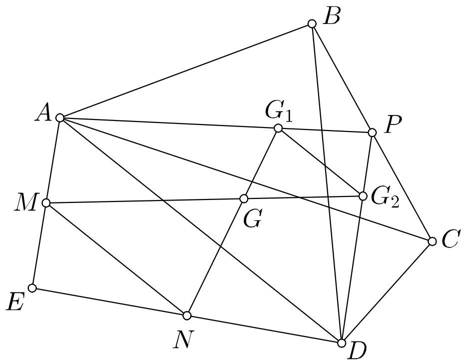
Într-adevăr, relaţia aceasta este echivalentă cu: $4n+1 < 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2 \Leftrightarrow$ $2n < 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4n^2 < 4n^2+4n < 4n^2+4n+1$, ceea ce este adevărat.

(2p) Avem $\left[\sqrt{4n+1}\,\right] = \left[\sqrt{4n+2}\,\right]$

Într-adevăr, dacă $\left[\sqrt{4n+2}\,\right] = a \in \mathbb{N}$, atunci $a \lneqq \sqrt{4n+2} < a+1 \Rightarrow a^2 \lneqq 4n+2 < (a+1)^2 \Rightarrow a^2 \leq 4n+1 < (a+1)^2 \Rightarrow a \leq \sqrt{4n+1} < a+1 \Rightarrow \left[\sqrt{4n+1}\,\right] = a$.

Aşadar, $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\,\right] = \left[\sqrt{4n+2}\,\right]$.

PROBLEMA 4.



(1p) a) Dacă P este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $\dfrac{PG_1}{PA} = \dfrac{PG_2}{PD} = \dfrac{1}{3}$. Deci $G_1G_2 \parallel AD$ şi $\dfrac{G_1G_2}{AD} = \dfrac{1}{3}$

(1p) $MN \parallel AD$ şi $\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{1}{2}$, deci $G_1G_2 \parallel MN$ şi $\dfrac{G_1G_2}{MN} = \dfrac{2}{3}$

(1p) În concluzie, pentru $[G_1N] \cap [G_2M] = \{G\}$, avem $\dfrac{G_1G}{GN} = \dfrac{G_2G}{GM} = \dfrac{2}{3}$

(1p) b) Pentru orice punct O din plan, avem $\overrightarrow{OG_1} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

(1p) $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right)$

(1p) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} \cdot \overrightarrow{OG_1} + \dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} \cdot \overrightarrow{ON} = \dfrac{3}{5} \cdot \overrightarrow{OG_1} + \dfrac{2}{5} \cdot \overrightarrow{ON}$

(1p) Aşadar, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{5}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right)$

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1.

(2p) Înlocuim în relaţia dată pe x, cu $2015 \cdot x$

(2p) şi obţinem $f(x) \leq 1 + \log_{2015} x$

(2p) Dar $f(x) \geq 1 + \log_{2015} x$

(1p) Aşadar, $f(x) = 1 + \log_{2015} x$

PROBLEMA 2.

(2p) a) De exemmplu, fie $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $b = \log_{\sqrt{2}} 3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(1p) Se verifică $a^b = 3 \in \mathbb{N}$

(1p) b) După pasul 1 se obţin numerele $1925,\ 693,\ 2475,\ 1575$.

(2p) Dacă după pasul k, pe tablă sunt scrise numerele a, b, c şi d, atunci la pasul $k+1$ numerele devin $\sqrt[3]{bcd}$, $\sqrt[3]{acd}$, $\sqrt[3]{abd}$, $\sqrt[3]{abc}$. Se observă că $\sqrt[3]{bcd} \cdot \sqrt[3]{acd} \cdot \sqrt[3]{abd} \cdot \sqrt[3]{abc} = abcd$, adică după fiecare pas, produsul numerelor de pe tablă este acelaşi.

(1p) Produsul numerelor iniţiale se termină în 5, iar produsul numerelor $847,\ 567,\ 297$ şi 8019 se termină în 7. În concluzie, nu este posibil ca după un număr finit de paşi, să fie scrise pe tablă aceste numere.

PROBLEMA 3.

(1p) Din $z^2 - z + 5 = 0$ avem $(z-1)^2 = -(z+4)$

(3p) Dacă există un număr $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = 4n$ şi $b = 2n$, atunci

$$(z-1)^2 = -(z+4) \Rightarrow \left((z-1)^2\right)^{2n} = \left(-(z+4)\right)^{2n} \Rightarrow (z-1)^a - (z+4)^b = 0$$

(3p) Dacă $(z-1)^a = (z+4)^b$, atunci

$$(z-1)^2 = -(z+4) \Rightarrow (z-1)^{2b} = (-1)^b \cdot (z+4)^b \Rightarrow (z-1)^{2b} = (-1)^b \cdot (z-1)^a$$

de unde, $a = 4n$ şi $b = 2n$ pentru un număr $n \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 4.

(1p) Avem $|a+b|^2 = (a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = 2 + a\overline{b} + \overline{a}b$

(1p) şi $AB^2 = |b-a|^2 = (b-a)\left(\overline{b}-\overline{a}\right) = 2 - \left(a\overline{b} + \overline{a}b\right)$

(1p) de unde, $|a+b|^2 = 4 - AB^2$

Analog, $|b+c|^2 = 4 - BC^2$ şi $|c+a|^2 = 4 - AC^2$

(1p) Relaţia dată devine: $4 - AB^2 + 4 - BC^2 + 4 - AC^2 = 4 \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + AC^2 = 8$

(1p) Din teorema sinusurilor rezultă că $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

(2p) sau echivalent, $1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0 \Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$,

adică triunghiul ΔABC este dreptunghic.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1.

(2p) Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\det(A+xI_3)$ şi observăm că $f(x)=x^3+ax^2+bx+\det A$.

(2p) Din ipoteză, $f(1)=f(2)\Rightarrow 3a+b+7=0$

(1p) Avem $2\det(A+I_3)+\det(A-I_3)+6=2f(1)+f(-1)+6$

(2p) dar, $2f(1)+f(-1)+6=3\det A+(3a+b+7)=3\det A$.

PROBLEMA 2.

(2p) Dacă S este aria triunghiului, atunci: $2S=ah_a=bh_b=ch_c\Rightarrow h_a=\dfrac{2S}{a},\ h_b=\dfrac{2S}{b},\ h_c=\dfrac{2S}{c}$

(1p) $\det A=4S^2\cdot\begin{vmatrix}1 & a & \frac{1}{ab}\\ 1 & b & \frac{1}{bc}\\ 1 & c & \frac{1}{ca}\end{vmatrix}$

(2p) $\det A=4S^2\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{abc}=2S^2\cdot\dfrac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{abc}\geqslant 0$

(2p) $\det A=0\Leftrightarrow a=b=c$

PROBLEMA 3.

(1p) Avem $\left\{\sqrt{n^2+5n+9}\,\right\}=\sqrt{n^2+5n+9}-\left[\sqrt{n^2+5n+9}\,\right]$

(3p) Dearece, $n+2<\sqrt{n^2+5n+9}<n+3,\ \forall\ n\geqslant 1$

(1p) obţinem că $\left[\sqrt{n^2+5n+9}\,\right]=n+2$

(2p) şi astfel, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+5n+9}\,\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+9}-(n+2)\right)=\dfrac{1}{2}$

PROBLEMA 4.

(1p) a) Din $x_n - x_{n-1} = 2n+1$, pentru $n \geq 2$

(3p) obţinem că $x_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (2k+1) = n(n+2)$

(2p) b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{2k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

(1p) şi astfel, $\lim_{n\to\infty} n \left(\ln 2 + \ln \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{2k-1}} \right) \right) = \ln \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n \right) = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

---

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1.

(2p) a) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, atunci $\det(A) = a^2 + b^2$. Cum $x^2 \in \left\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{4}\right\}, \forall\, x \in \mathbb{Z}_7$, obţinem că $a^2 + b^2 = \widehat{0} \Leftrightarrow a = b = \widehat{0}$, adică $A = O_2$

(2p) b) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G \setminus \{O_2\}$ şi $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in G \setminus \{O_2\}$, atunci

$A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \in G.$

Din $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq \widehat{0}$, obţinem că $A \cdot B \neq O_2$, adică $A \cdot B \in G \setminus \{O_2\}$

(1p) c) Observăm că $(G \setminus \{O_2\}, \cdot)$ este un grup finit de ordinul 48.

$\left(\text{elementul neutru este } I_2, \text{ şi } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G \setminus \{O_2\}\right)$

(2p) Aşadar, $X^{48} = I_2, \forall\, X \in G \setminus \{O_2\}$.

Matricea $B = \begin{pmatrix} \widehat{2} & -\widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ satisface relaţia $B^4 = -I_2$

Astfel, dacă $X \in G \setminus \{O_2\}$, şi $X^{12} = B \Rightarrow X^{48} = B^4 \Rightarrow I_2 = -I_2$ Contradicţie.

Deci, ecuaţia dată nu are soluţii în mulţimea G.

PROBLEMA 2.

Fie $x, y \in G$.

(1p) Dacă cel puţin unul dintre x şi y este din $\mathrm{Z}(G)$, atunci $xy = yx$.

Dacă $x, y \in G \setminus \mathrm{Z}(G)$, atunci $x^2 = y^2 = e$ şi avem următoarele cazuri:

(3p) dacă $xy \in \mathrm{Z}(G) \Rightarrow x(xy)y = (xy)xy = x(yx)y \Rightarrow xy = yx$

(3p) dacă $xy \notin \mathrm{Z}(G) \Rightarrow x^2y^2 = (xy)^2 = e \Rightarrow x(xy)y = x(yx)y \Rightarrow xy = yx$

PROBLEMA 3.

(2p) $f(e^t) = \begin{cases} e^t, & \text{dacă } t \le 0 \\ e^t - 1, & \text{dacă } t > 0 \end{cases}$; $f(e^{-t}) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{dacă } t \ge 0 \\ e^{-t} - 1, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$

(2p) Pentru $t \in [0,1]$, avem $g(t) = \dfrac{f(e^t)}{f(e^{-t})} = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ e^{2t} - e^t, & 0 < t \le 1 \end{cases}$

(2p) Funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ este mărginită şi continuă pe $(0,1]$, deci este integrabilă şi $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})}\mathrm{d}t = \int_0^1 (e^{2t} - e^t)\,\mathrm{d}t$

(1p) $\displaystyle\int_0^1 (e^{2t} - e^t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(e-1)^2$

PROBLEMA 4.

(2p) Prin descompunerea funcţiei raţionale $f(x) = \dfrac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^2}$ în fracţii raţionale simple, obţinem $f(x) = A(x) + \dfrac{px+q}{1+x^2}$, unde $p, q \in \mathbb{Z}$.

(1p) Din $(1+x)^n + (1-x)^n = (1+x^2)\cdot A(x) + px + q$, obţinem

$$\begin{cases} (1+i)^n + (1-i)^n = p\,i + q \\ (1-i)^n + (1+i)^n = -p\,i + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = (1-i)^n + (1+i)^n \end{cases}$$

(1p) $q = \left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^n + \left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \cos\dfrac{n\pi}{4}$

(1p) Avem $I_n = \displaystyle\int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{q}{1+x^2}\mathrm{d}x$,

(1p) unde $\displaystyle\int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}$ şi $\displaystyle\int_0^1 \frac{q}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \cos\frac{n\pi}{4}$

(1p) Aşadar, $I_n \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{q}{1+x^2}\mathrm{d}x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \cos\frac{n\pi}{4} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{4} = 0$, de unde obţinem că $n \in \{4k+2 : k \in \mathbb{N}\}$.

[1] Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2] Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.